



مهدی شاکریان

نام آزمون: مثلثات دهم درس ۳

سایت: sebghatebartar.com

تلفن پنج رقمی: ۰۵۱۳۸۱۱۷

روابط بین نسبت های مثلثاتی

قلم چی - ۱۳۹۹

۱ حاصل عبارت مثلثاتی $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 2 \cot \alpha \times \sin^2 \alpha$ کدام است؟ (عبارت تعریف شده است.)

$4 \sin \alpha \cos \alpha$ ۱

۲ ۲

۱ ۲

صفر ۱

قلم چی - ۱۳۹۹

۲ اگر انتهای کمان θ در ربع اول قرار داشته باشد، حاصل عبارت $A = \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin \theta \sqrt{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}}$ کدام است؟

$\frac{1}{\sin^2 \theta}$ ۱

۱ + $\tan^2 \theta$ ۲

۱ - $\cot \theta$ ۲

$\tan \theta$ ۱

قلم چی - ۱۳۹۹

۳ حاصل عبارت تعریف شده $\frac{1 + \cos x}{\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x(1 - \cos x)}$ همواره کدام است؟

$\cos x$ ۱

$\sin x$ ۲

۱ ۲

صفر ۱

قلم چی - ۱۳۹۹

۴ اگر $\tan x = 2$ باشد، حاصل $\frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^5 x + \cos^5 x}$ کدام است؟

$\frac{45}{31}$ ۱

$\frac{15}{11}$ ۲

$\frac{1}{15}$ ۲

$\frac{11}{15}$ ۱

قلم چی - ۱۳۹۹

۵ اگر $\frac{\cos x - 2 \sin x}{\sin x + 2 \cos x}$ باشد، حاصل $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \sqrt{3}$ کدام است؟

$8 + 5\sqrt{3}$ ۱

$-8 - 5\sqrt{3}$ ۲

$\frac{2\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 2}$ ۲

$\frac{1 - 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2}$ ۱

قلم چی - ۱۳۹۹

۶ اگر $A = \sin \alpha - \cos \alpha$ باشد، مقدار $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 14$ و $90^\circ < \alpha < 135^\circ$ کدام است؟

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ ۱

$\sqrt{\frac{7}{2}}$ ۲

$\sqrt{\frac{5}{2}}$ ۲

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $180^\circ < \alpha < 225^\circ$ باشد، ساده شده عبارت $A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^r \alpha - \cos^r \alpha}}$ کدام است؟

 $-\sin \alpha - \cos \alpha$ ۱

 $-\sin \alpha + \cos \alpha$ ۲

 $\sin \alpha - \cos \alpha$ ۳

 $\sin \alpha + \cos \alpha$ ۴

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $A = \frac{\cot^r x + 1}{\tan^r x + 1} - \frac{1}{\sin^r x}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (عبارت‌ها تعریف شده هستند).

 $A \cdot \sin^r x = \cos^r x$ ۱

 $\sin^r x + A = A \cdot \cos^r x$ ۲

 $\sin^r x + \cos^r x = A$ ۳

 $A \cdot \cos^r x = \sin^r x$ ۴

قلم چی- ۱۳۹۹

با فرض $\sin \alpha \cos \alpha, \tan \alpha + \cot \alpha = ۴$ کدام است؟

صفر ۱

۱ ۲

 $\frac{1}{4}$ ۳

۴ ۵

یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویه 30° نسبت به راستای افق پرتاب می‌شود. بعد از طی ۲۰۰۰ متر با این زاویه

قلم چی- ۱۳۹۹

در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار می‌گیرد؟

۱۰۱۵ ۱

 $1000\sqrt{3} + 15$ ۲

 $1015\sqrt{3}$ ۳

۱۰۰۰ ۴

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $\cos \theta = A$ باشد، حاصل عبارت $(1 - \sin^r \theta)(2 + \tan^r \theta)$ همواره کدام است؟

 $2 + A^r$ ۱

 A^r ۲

 $1 + A^r$ ۳

 $1 - A^r$ ۴

اگر $B = \frac{1}{\tan^r x} + \frac{1}{\cot^r x}$ و $A = \frac{1}{\sin^r x} + \frac{1}{\cos^r x}$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (A و B تعریف شده هستند).

قلم چی- ۱۳۹۹

 $A + B = ۲$ ۱

 $A - B = ۲$ ۲

 $A + B = ۰$ ۳

 $A - B = ۰$ ۴

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $\frac{1}{\cos x} - \sin x \times \tan x < ۰$ و $\sin x + \tan x > ۰$ باشند، انتهای کمان x در کدام ناحیه دایره مثلثاتی است؟

چهارم ۱

سوم ۲

دوم ۳

اول ۴

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $0^\circ < x < 90^\circ$ باشد، حاصل $\sqrt{\tan x + \cot x}$ کدام است؟ ($\sin x - \cos x = m$)

 $\sqrt{\frac{2}{m^r - 1}}$ ۱

 $\sqrt{\frac{m^r - 1}{2}}$ ۲

 $\sqrt{\frac{2}{1 - m^r}}$ ۳

 $\sqrt{\frac{1 - m^r}{2}}$ ۴

قلم چی- ۱۳۹۹

حاصل $(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta)(1 - \sin \theta)$ کدام است؟

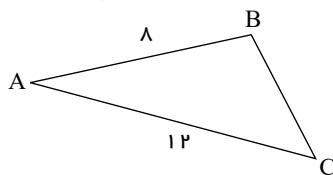
 $1 + \cos \theta$ ۱

 $1 + \sin \theta$ ۲

 $\cos \theta$ ۳

 $\sin \theta$ ۴

قلم چی- ۱۳۹۹



(cot A = \frac{\sqrt{5}}{2}) مساحت مثلث ABC در شکل مقابل کدام است؟ (۱۶)

۳۲ (۲)

۴۰ (۳)

۲۸ (۱)

۲۴ (۲)

قلم چی- ۱۳۹۹

tan^۳ x sin^۳ x (۲)

cos^۳ x (۲)

cot^۳ x cos^۳ x (۲)

cot^۳ x (۱)

باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی واقع است؟ (۱۷)

قلم چی- ۱۳۹۹

چهارم (۲)

سوم (۲)

دوم (۲)

اول (۱)

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $1 - \tan \alpha = \frac{2}{3}$ و $\sin^۳ \alpha \times \cos \alpha < ۰$ حاصل عبارت $\sin \alpha \cos \alpha$ کدام است؟ (۱۸)

- \frac{۳}{۱۰} (۲)

\frac{۳}{۱۰} (۲)

- \frac{۹}{۱۰} (۲)

\frac{۹}{۱۰} (۱)

قلم چی- ۱۳۹۹

حاصل عبارت $A = \frac{\sin \theta (1 - \cos^۲ \theta)}{1 + \cos \theta} + \sin \theta \cos \theta$ همواره کدام است؟ (۲۰)

\frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} (۲)

\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} (۲)

\cos \theta (۲)

\sin \theta (۱)

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $\frac{\cos^۳ x}{1 + \sin x} = \frac{۹}{۵}$ باشد، حاصل $1 + \cot^۳ x$ کدام است؟ (۲۱)

\frac{۲۵}{۹} (۲)

\frac{۹}{۴} (۲)

\frac{۲۵}{۱۶} (۲)

\frac{۳}{۲} (۱)

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $\frac{\tan \theta}{1 + \tan^۲ \theta} = \frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $(1 + \tan \theta)(1 + \cot \theta)$ کدام است؟ (۲۲)

\frac{۳}{۴} (۲)

\frac{۸}{۹} (۲)

\frac{۱}{۱۶} (۲)

\frac{۱}{۴} (۱)

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = ۲$ باشد، حاصل $\sin x \cos x$ کدام است؟ (۲۳)

\frac{۸}{۹} (۲)

\frac{۲\sqrt{۲}}{۹} (۲)

- \frac{۸}{۹} (۲)

\frac{-۲\sqrt{۲}}{۹} (۱)

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $\sin x + \cos x = \frac{6}{5}$ باشد، حاصل $\tan x + \cot x$ کدام است؟ ۲۴

$\frac{11}{25}$ ۲

$\frac{50}{11}$ ۳

$\frac{25}{11}$ ۴

$\frac{11}{50}$ ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $\cos^4 \alpha + \tan^4 \alpha = 45$ باشد، حاصل $1 + 7 \tan^2 \alpha$ کدام است؟ ۲۵

9 ۲

5 ۳

4 ۴

3 ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل عبارت $A = \tan x + \cot x$ کدام است؟ ۲۶

$\frac{2}{3}$ ۲

$\frac{4}{3}$ ۳

$\frac{8}{3}$ ۴

1 ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

ساده شده عبارت تعریف شده $A = 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ کدام است؟ ۲۷

$-\cos x$ ۲

$\cos x$ ۳

$-\sin x$ ۴

$\sin x$ ۱

اگر $\sin x + 5 \sin x = \frac{-1}{\sin x - 1}$ باشد، با فرض بر این‌که انتهای کمان زاویه x در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\cot x$ کدام است؟ ۲۸

قلم چی- ۱۳۹۹

2 ۲

-2 ۳

$\frac{1}{2}$ ۴

$-\frac{1}{2}$ ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

ساده شده عبارت $\frac{\sin^2 a - \tan^2 a}{\cos^2 a - \cot^2 a}$ کدام است؟ (عبارت تعریف شده است). ۲۹

$-\cot^2 a$ ۲

$-\tan^2 a$ ۳

$\tan^2 a$ ۴

$\cot^2 a$ ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

حاصل عبارت تعریف شده $(\tan^4 \theta + 2 \tan^2 \theta + 1)(\sin^4 \theta - 2 \sin^2 \theta + 1)$ کدام است؟ ۳۰

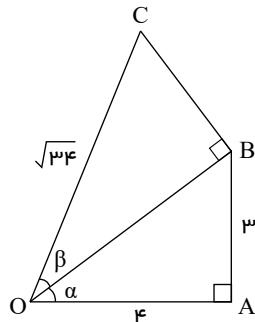
1 ۲

$1 + \sin^2 \theta$ ۳

$\cos^2 \theta$ ۴

$\cos^4 \theta$ ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

با توجه به شکل زیر، حاصل عبارت $\tan \alpha + \cot \beta$ کدام است؟ ۳۱

- ۲۷ ۱
۲۰ ۲
۱۳ ۳
۲۵ ۴
۲۹ ۵
۱۵ ۶
۲۹ ۷
۱۲ ۸

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $A = (1 - \sin x)(1 - \cos x)$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sin x + \cos x = \frac{3}{4}$ کدام است؟ ۳۲

- $\frac{15}{32}$ ۸
- $\frac{1}{32}$ ۳
 $\frac{15}{32}$ ۷
 $\frac{1}{32}$ ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

حاصل عبارت تعریف شده A کدام است؟ ۳۳

$$A = \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x + \cot x$$

- $\sin x + \cos x$ ۸
۱ ۳
 $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ ۷
۲ ۱

قلم چی- ۱۳۹۹

اگر $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cot \alpha = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\cot \alpha = \frac{2}{3}$ کدام است؟ ۳۴

- $\frac{7}{13}$ ۸
- $\frac{7}{13}$ ۳
- $\frac{5}{13}$ ۷
 $\frac{5}{13}$ ۱

بررسی درستی اتحادهای مثلثاتی

قلم چی- ۱۳۹۹

کدامیک از تساوی‌های زیر یک اتحاد مثلثاتی نیست؟ (همه عبارت‌ها تعریف شده‌اند). ۳۵

- | | |
|---|---|
| $\sin^4 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$ ۳
$\tan^4 x + \cot^4 x = \frac{1 - 2(\sin x \cos x)}{\sin^4 x \cos^4 x}$ ۸ | $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ ۱
$\frac{1 + \tan^4 x}{1 + \cot^4 x} = \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}\right)^4$ ۳ |
|---|---|

پاسخنامه تشریحی

۱
۲
۳
۴
۵

نکته:

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1$$

با استفاده از اتحاد مزدوج $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ و اتحاد $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ دو جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}} = \frac{(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{\sin \theta \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2}} \\ &= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta \times |\sin \theta + \cos \theta|} \xrightarrow[\text{نهایی کمان } \theta \text{ در ناحیه اول}]{} A = \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta) \times \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta} = 1 - \cot \theta \end{aligned}$$

۱
۲
۳
۴
۵

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x(1 - \cos x)} &= \frac{\overbrace{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}^{\text{اتحاد مزدوج}} - \sin^2 x}{\sin^2 x(1 - \cos x)} = \frac{(1 - \cos^2 x) - \sin^2 x}{\sin^2 x(1 - \cos x)} \\ &= \frac{\sin^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x(1 - \cos x)} = \frac{0}{\sin^2 x(1 - \cos x)} = 0. \end{aligned}$$

با توجه به آنکه $\tan x = 2$ است، داریم:

$$\tan x = 2 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Rightarrow \sin x = 2 \cos x$$

حال در عبارت خواسته شده به جای $\sin x$ و $\cos x$ عبارت $2 \cos x$ را قرار می‌دهیم و آن را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \frac{\cancel{\sin x = 2 \cos x}}{(\cancel{2 \cos x})^2 + \cos^2 x} = \frac{1 + \cos^2 x + \cos^2 x}{32 \cos^4 x + \cos^2 x} = \frac{1 + 2 \cos^2 x}{33 \cos^4 x} = \frac{1 + 2}{11 \cos^2 x} \quad (*)$$

حال از رابطه $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ استفاده می‌کنیم تا $\cos^2 x$ بدست آید:

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \xrightarrow{\tan x = 2} 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{5} \quad (**)$$

با جایگذاری $(**)$ در $(*)$ عبارت موردنظر برابر می‌شود با:

$$\frac{1 + 2}{11 \times \left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{15}{11}$$

عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \frac{1 + \tan x}{1 + \frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{1 + \tan x}{\tan x}}{\frac{1 + \tan x}{\tan x}} = \tan x = \sqrt{3}$$

مثال دهم درس ۳

$$\frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} = \frac{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sqrt{3} \cos x}{\cos x}} = \frac{1 - \sqrt{3} \tan x}{\tan x + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}(\sqrt{3})}{\sqrt{3} + \sqrt{3}}$$

داریم:

$$\tan^r \alpha + \cot^r \alpha = 14 \xrightarrow{+2} \tan^r \alpha + \cot^r \alpha + 2 \times 1 = 16$$

با توجه به فرض سؤال

$$\tan \alpha \cot \alpha = 1 \xrightarrow{\quad} \tan^r \alpha + \cot^r \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha = 16$$

با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a+b)^r = a^r + 2ab + b^r$ داریم:

$$\Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^r = 16$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = \pm 4 \xrightarrow[\text{در ناحیه دوم است پس } \alpha \text{ و } \cot \alpha \text{ هر دو منفی هستند.}]{} \tan \alpha + \cot \alpha = \pm 4$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = -4 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -4$$

می‌دانیم $\sin^r x + \cos^r x = 1$ است پس:

$$\Rightarrow \frac{\sin^r \alpha + \cos^r \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = -4 \Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = -4 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\Rightarrow A = \sin \alpha - \cos \alpha \xrightarrow{\text{پذیران}} A^r = \sin^r \alpha + \cos^r \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \xrightarrow{(1)} 1 - 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

چون در ناحیه دوم $\sin \alpha$ مثبت و $\cos \alpha$ منفی است، پس $\sin \alpha - \cos \alpha$ مثبت است، یعنی $A = \sqrt{\frac{3}{2}}$ قابل قبول است.

$$A = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^r \alpha - \cos^r \alpha}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^r \alpha(1 - \cos^r \alpha)}}$$

می‌دانیم: $1 - \cos^r \alpha = \sin^r \alpha$ در نتیجه:

$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^r \alpha \sin^r \alpha}} = \sqrt{1 + 2|\sin \alpha \cos \alpha|}$$

وقتی $180^\circ < \alpha < 225^\circ$ باشد، α و $\sin \alpha$ هر دو منفی هستند، در نتیجه عبارت داخل قدرمطلق $|\sin \alpha \cos \alpha|$ مثبت است.

$$A = \sqrt{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \sqrt{\sin^r \alpha + \cos^r \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$= \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^r} = |\sin \alpha + \cos \alpha|$$

در ناحیه سوم هم $\cos \alpha$ و $\sin \alpha$ هم منفی هستند، پس:

$$\xrightarrow{\sin \alpha + \cos \alpha < 0} A = -\sin \alpha - \cos \alpha$$

ابتدا عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \sin^r x + \cos^r x = 1 \xrightarrow{\div \sin^r x} 1 + \cot^r x = \frac{1}{\sin^r x} \\ \sin^r x + \cos^r x = \xrightarrow{\div \cos^r x} 1 + \tan^r x = \frac{1}{\cos^r x} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\cot^r x + 1}{\tan^r x + 1} = \frac{\frac{1}{\sin^r x}}{\frac{1}{\cos^r x}} = \frac{\cos^r x}{\sin^r x}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\cos^r x}{\sin^r x} - \frac{1}{\sin^r x} = \frac{\cos^r x - 1}{\sin^r x}$$

$$= \frac{-(1 - \cos^r x)}{\sin^r x} = -\frac{\sin^r x}{\sin^r x} = -1 \quad (1)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x - 1 = -\cos^2 x \quad (2)$$

در نتیجه بنابر رابطه (1) و (2) داریم:

$$\Rightarrow \sin^2 x + A = A \cos^2 x$$

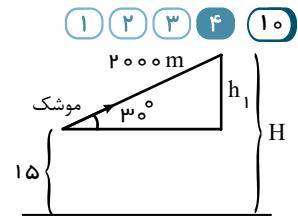
1
2
3
4
۹

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 1 \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = 1$$

می‌دانیم: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 1 \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{1}$$

$$H = 15 + h_1 \\ \sin 30^\circ = \frac{h_1}{200} \Rightarrow h_1 = 100m \Rightarrow H = 115m$$


1
2
3
4
۱۰

$$(1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = (\cos^2 \theta)(1 + 1 + \tan^2 \theta)$$

$$= \cos^2 \theta (1 + \frac{1}{\cos^2 \theta}) = \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \cos^2 \theta + 1 \xrightarrow{\cos \theta = A} A^2 + 1$$

می‌دانیم: 1 2 3 ۴ ۱۲

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{array} \right. \Rightarrow A = (1 + \cot^2 x) + (1 + \tan^2 x) = 2 + \cot^2 x + \tan^2 x \quad (1)$$

همچنین:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tan x} = \cot x \\ \frac{1}{\cot x} = \tan x \end{array} \right. \Rightarrow B = \cot^2 x + \tan^2 x \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} A = B + 2 \Rightarrow A - B = 2$$

$$\sin x = \cos x \cdot \tan x \quad . \text{ از آنجایی که } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad (1) \quad \text{ بنابراین داریم:}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\sin x + \tan x = \cos x \cdot \tan x + \tan x = (\cos x + 1) \times \tan x$$

چون $\sin x + \tan x$ طبق فرض سؤال مثبت است پس:

$$(\cos x + 1) \times \tan x > 0 \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} \underbrace{\cos x + 1}_{\text{نامنفی}} \times \tan x > 0 \Rightarrow \tan x > 0 \Rightarrow \quad (1) \text{ انتهای کمان } x \text{ در ربع اول و سوم است.}$$

$$\frac{1}{\cos x} - \sin x \times \tan x = \frac{1}{\cos x} - \sin x \times \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} < 0$$

از طرفی $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ ۱ پس:

$$\frac{\cos^2 x}{\cos x} < 0 \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \quad (2) \text{ انتهای کمان } x \text{ در ربع دوم یا سوم است.}$$

با توجه به اشتراک (1) و (2)، انتهای کمان x در ناحیه سوم دایره مثلثاتی قرار دارد.

$$\sin x - \cos x = m \xrightarrow{\text{پاد}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - 2 \sin x \cos x = m^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2 \sin x \cos x = m^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - m^2}{2}$$

$$\sqrt{\tan x + \cot x} = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}} = \sqrt{\frac{1}{1-m^2}} = \sqrt{\frac{2}{1-m^2}}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left(\frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta\right)(1 - \sin \theta) = \left(\frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}\right)(1 - \sin \theta) = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$1 + \cot^2 A = \frac{1}{\sin^2 A} \Rightarrow \sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB \times AC \times \sin \hat{A}}{2} = \frac{8 \times 12 \times \frac{1}{2}}{2 \times 3} = 24$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x \times \sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x \times \sin^2 x$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$(1) : \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \xrightarrow{1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\cos \alpha|} = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha > 0 \quad \text{ناحیه اول یا چهارم}$$

$$(2) : \tan \alpha = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-|\sin \alpha|}{\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = -|\sin \alpha| \Rightarrow \sin \alpha < 0 \quad \text{ناحیه سوم یا چهارم}$$

$\xrightarrow{(1) \cap (2)}$ در ناحیه چهارم واقع است.

$$1) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 - \tan \alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0$$

$$\xrightarrow{\tan \alpha > 0} \sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}}, \quad \cos \alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} \times \left(-\sqrt{\frac{4}{5}}\right) = \frac{2}{5}$$

$$1) (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$2) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$A = \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)} + \sin \theta \cos \theta \Rightarrow A = \sin \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta = \sin \theta$$

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2) 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$3) (a - b)(a + b) = (a^2 - b^2)$$

$$\frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 1 - \sin x = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{5}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\underbrace{(1 + \tan \theta)(1 + \cot \theta)}_a \cdot \underbrace{\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}}_b$$

$$a = (1 + \cot \theta + \tan \theta + 1) = 2 + \cot \theta + \tan \theta = 2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= 2 + \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2 + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$b = \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \xrightarrow{1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}} b = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \cos^2 \theta = \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow a \times b = \left(2 + \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \right) \sin \theta \cos \theta = 2 \sin \theta \cos \theta + 1 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \xrightarrow{\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{r}} \left(\frac{1}{r} \right)^2 = \frac{1}{r^2}$$

۱
۲
۳
۴
۲۳

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 2 \Rightarrow 1 - \cos x = 2 + 2 \cos x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{r} \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

x در ناحیه سوم می‌تواند قرار بگیرد.

$$\text{می‌دانیم: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \left(-\frac{\sqrt{r}}{r} \right) \left(-\frac{1}{r} \right) = \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{r\sqrt{r}}{r}$$

۱
۲
۳
۴
۲۴

$$\text{طبق فرض سؤال: } \sin x + \cos x = \frac{r}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{r^2}{25}$$

می‌دانیم $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ است در نتیجه:

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{r^2}{25} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{r^2 - 1}{25}$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{r^2 - 1}{50}$$

از طرفی:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{r^2 - 1}{50}} = \frac{50}{r^2 - 1}$$

از اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ و نیز اتحاد مثلثاتی $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ استفاده می‌کنیم:

$$r^2 \tan^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha} + r^2 = 49$$

$$\Rightarrow r(\tan^2 \alpha + 1)^2 = 49 \Rightarrow \tan^2 \alpha + 1 = \frac{7}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{7}{r} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{r}{7} \Rightarrow r \cos^2 \alpha + 1 = 3$$

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$2) (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

ابتدا عبارت A را ساده می‌کنیم:

$$A = \tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x} \quad (1)$$

حال باید حاصل $\sin x \cos x$ را به دست آوریم:

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (\sin x - \cos x)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{3}{8} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \Rightarrow \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3}$$

با جایگذاری $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ، عبارت را ساده می‌کنیم.

$$A = 1 - \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x}$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} A = 1 - \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = 1 - 1 + \cos x = \cos x$$

$$\Delta + \Delta \sin x = \frac{1}{\sin x - 1} \Rightarrow \Delta(1 + \sin x) = -\frac{1}{-(1 - \sin x)}$$

$$\Rightarrow \Delta(1 + \sin x)(1 - \sin x) = 1 \Rightarrow 1 - \sin^2 x = \frac{1}{\Delta}$$

$$\xrightarrow{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \cos^2 x = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \Delta \xrightarrow{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} 1 + \tan^2 x = \Delta$$

$$\Rightarrow \tan^2 x = \Delta \Rightarrow \tan x = \pm \sqrt{\Delta} \xrightarrow[\tan x > 0]{\text{در ناحیه سوم است}} \tan x = \sqrt{\Delta} \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

عبارت مورد نظر را ساده می‌کنیم؛ داریم:

$$\frac{\sin^2 a - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}}{\cos^2 a - \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a}} = \frac{\sin^2 a(1 - \frac{1}{\cos^2 a})}{\cos^2 a(1 - \frac{1}{\sin^2 a})}$$

$$= \frac{\sin^2 a(\frac{\cos^2 a - 1}{\cos^2 a})}{\cos^2 a(\frac{\sin^2 a - 1}{\sin^2 a})} = \frac{\sin^2 a(\frac{-\sin^2 a}{\cos^2 a})}{\cos^2 a(\frac{-\cos^2 a}{\sin^2 a})}$$

$$\frac{-\sin^r a}{\cos^r a} = \frac{\sin^r a}{\cos^r a} = \tan^r a$$

$$\frac{-\cos^r a}{\sin^r a}$$

طبق اتحاد مربع مجموع یا تفاضل دو جمله داریم:

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۰

$$\tan^r \theta + 2 \tan^r \theta + 1 = (\tan^r \theta + 1)^r$$

$$\sin^r \theta - 2 \sin^r \theta + 1 = (\sin^r \theta - 1)^r$$

حال با توجه به این که $\sin^r \theta - 1 = -\cos^r \theta$ و $\tan^r \theta + 1 = \frac{1}{\cos^r \theta}$ داریم:

$$(\tan^r \theta + 1)^r (\sin^r \theta - 1)^r = \frac{1}{\cos^r \theta} (-\cos^r \theta)^r = \frac{\cos^r \theta}{\cos^r \theta} = 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۱

با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث OAB داریم:

$$OA^r + AB^r = OB^r \Rightarrow r^r + 3^r = OB^r \Rightarrow OB = 5$$

بنابراین در مثلث قائم الزاویه OCB نیز داریم:

$$OB^r + BC^r = OC^r \Rightarrow BC^r = OC^r - OB^r \Rightarrow BC^r = 3^r - 2^r \Rightarrow BC = 3$$

در نتیجه:

$$\tan \alpha = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{4}, \cot \beta = \frac{OB}{BC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \tan \alpha + \cot \beta = \frac{3}{4} + \frac{5}{3} = \frac{29}{12}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۲

$$A = (1 - \sin x)(1 - \cos x) = 1 - \sin x - \cos x + \sin x \cos x$$

$$\frac{\sin x + \cos x = \frac{3}{4}}{1 - (\sin x + \cos x) + \sin x \cos x = 1 - \frac{3}{4} + \sin x \cos x = \frac{1}{4} + \sin x \cos x}$$

از طرفی:

$$(1 - \sin x)(1 - \cos x) = \underbrace{\sin^r x + \cos^r x}_1 + 2 \sin x \cos x = \frac{9}{16} \Rightarrow 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{9}{16} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{7}{16} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{7}{32} \quad (1)$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4} + \sin x \cos x \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4} - \frac{7}{32} = \frac{1}{32}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۳

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^r x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^r x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\ \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{1 - \sin^r x} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\cos^r x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \end{cases}$$

بنابر روابط بالا داریم:

$$A = \frac{1 - \cos x}{\sin x} + \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۴

$$1 + \cot^r \alpha = \frac{1}{\sin^r \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{4}{9} = \frac{1}{\sin^r \alpha} \Rightarrow \sin^r \alpha = \frac{9}{13}$$

$$\sin^r \alpha + \cos^r \alpha = 1 \Rightarrow \frac{9}{13} + \cos^r \alpha = 1 \Rightarrow \cos^r \alpha = \frac{4}{13}$$

$$\cos^r \alpha - \sin^r \alpha = (\cos^r \alpha + \sin^r \alpha)(\cos^r \alpha - \sin^r \alpha) = \cos^r \alpha - \sin^r \alpha = \frac{4}{13} - \frac{9}{13} = -\frac{5}{13}$$

بررسی گزینه ها:

۱ ۲ ۳ ۴ ۳۵

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} : \text{طرف راست}$$

$$\sin^2 x - \sin^2 x = (1 - \cos^2 x)^2 - (1 - \cos^2 x)$$

$$= (1 - 2\cos^2 x + \cos^2 x) - (1 - \cos^2 x) = \cos^2 x - \cos^2 x : \text{طرف راست}$$

$$\frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cot^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$$

$$\left(\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}\right)^2 = \left(\frac{\frac{\cos x + \sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}\right)^2 = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = \tan^2 x$$

$$\tan^2 x + \cot^2 x = (1 + \tan^2 x) + (1 + \cot^2 x) - 2$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} - 2 = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1 - 2(\sin x \cos x)^2}{\sin^2 x \cos^2 x} : \text{مخالف طرف راست}$$

پاسخنامہ کلیچ

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴

۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴

۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴

۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴